Concours Centrale - Supélec 1997

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

Dans tout le problème, n est un entier strictement supérieur à 1 et $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Si M est une telle matrice, ${}^tM$ désigne la matrice transposée. À une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$, on associe les $2n$ sommes

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \text{ et } \beta_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$$

obtenues pour i et j variant de 1 à n (γ_j est la somme des éléments de la j-ème colonne et β_i celle des éléments de la i-ème ligne). Si ces $2n$ sommes sont égales, M est dite "**pseudo-magique**". On notera $s(M)$ la valeur commune à ces $2n$ sommes. Si M est pseudo-magique et si

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = s(M)$$

M est dite "**quasi-magique**". Enfin, si M est quasi-magique et si

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1} = s(M)$$

M est dite "**magique**".

Partie I - Exemples de matrices magiques d'ordre impair

On propose ici un algorithme permettant d'obtenir une matrice magique d'ordre n impair quelconque et dont les coefficients sont les entiers $1, 2, 3 \ldots, n^2$.

On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les k premiers entiers ont été placés et que l'entier k a été placé en i-ème ligne et j-ème colonne. On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :

- on pose $I = i - 1$ (sauf si $i = 1$, auquel cas on pose $I = n$) et $J = j + 1$ (sauf si $j = n$, auquel cas on pose $J = 1$) ;
- si aucun nombre n'a encore été placé à la I-ème ligne et J ème colonne, on y place $k+1$;
- si cet emplacement est pris, on pose $I = i + 1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $I = 1$) et $J = j$ et on place $k+1$ en I-ème ligne et J-ème colonne.

I.A - Pour $n = 5$, construire une matrice magique en utilisant l'algorithme précédent.

I.B - La constante impaire n étant supposée pré-définie, écrire un programme qui construise, en suivant l'algorithme précédent, une matrice magique d'ordre n. Le langage utilisé pour la programmation est au choix du candidat.

Partie II - Matrices magiques d'ordre n

II.A - Montrer que, pour définir une matrice pseudo-magique, on peut choisir arbitrairement les coefficients $m_{i,j}$ pour tout i et tout j entre 1 et $n-1$ ainsi que le coefficient $m_{1,n}$.

II.B - Montrer que l'ensemble des matrices pseudo-magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension.

II.C - Exhiber une matrice pseudo-magique qui ne soit pas quasi-magique.

II.D - Montrer que l'ensemble des matrices quasi-magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension en utilisant le résultat de la question II.B. On remarquera que l'application qui, à une matrice M, associe

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,1} - \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

II.E - Exhiber de même une matrice quasi-magique qui ne soit pas magique et montrer que l'ensemble des matrices magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension.

Partie III - Matrices magiques d'ordre 3

Dans les parties III et IV, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M est une matrice magique. On note u l'endomorphisme de E qui admet M comme matrice dans la base $\mathcal{B}$. On désigne par $\vec{v}$ le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

III.A - Montrer que les matrices magiques d'ordre 3 sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x+z & x+y+z & -y+z \\ x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x & y+z & x+z \end{pmatrix},$$

où x, y et z sont des réels quelconques. Montrer qu'il existe une et une seule matrice magique dont la première ligne est $(3, 4, 5)$, et écrire cette matrice.

III.B - Montrer que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de M. Préciser la valeur propre associée λ_1.

III.C - On note λ_2 et λ_3 les deux autres valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de la matrice M. Écrire les termes de degrés 3 et 2 du polynôme caractéristique de M ; calculer la somme des trois valeurs propres de M en fonction des coefficients diagonaux de M. En déduire que λ_2 et λ_3 sont opposées.

III.D - Former une équation cartésienne du plan vectoriel Π orthogonal à $\vec{v}$ et montrer que ce plan est stable par u.

III.E -

III.E.1) Préciser la direction du vecteur $u(\vec{i} - \vec{k})$, par rapport à celle de $\vec{v}$.

III.E.2) Montrer que $u(\vec{i} - \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{i} - \vec{k}$.

Partie IV - Étude de certaines matrices magiques d'ordre 3

Pour W, sous-espace vectoriel de E, on note $W^\perp$ l'orthogonal de W dans E, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de W ; $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de W. Par définition la symétrie orthogonale par rapport à W est la symétrie par rapport à W parallèlement à $W^\perp$. Un retournement (ou demi-tour) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

IV.A - *Étude préliminaire des symétries orthogonales*

Soient f un endomorphisme de E et S la matrice de f dans $\mathscr{E}$.

IV.A.1) Montrer que, pour que f soit une symétrie orthogonale par rapport à un certain sous-espace vectoriel W, il faut et il suffit que S soit à la fois symétrique et orthogonale.

IV.A.2) On suppose que f est une symétrie orthogonale. Quelles sont les valeurs propres possibles (réelles ou complexes) pour S ? Montrer que la symétrie orthogonale f est un retournement si et seulement si la trace de S est -1.

IV.B - *Étude préliminaire des rotations*

Soit $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une autre base orthonormée directe de E ; soient θ un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ et ρ la rotation d'angle θ autour de $\vec{K}$.

IV.B.1) Écrire la matrice R de ρ sur la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Quelles sont ses valeurs propres (réelles ou complexes) ?

IV.B.2) Pour quelles valeurs de θ deux de ces valeurs propres sont-elles opposées ? Pour chacune de ces valeurs de θ, donner la liste des valeurs propres de la matrice R avec leur ordre de multiplicité.

IV.B.3) Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque.

a) Pour $\theta = \pi/2$, montrer que $\rho(\vec{w})$ est le vecteur $(\vec{w} \cdot \vec{K})\vec{K} - (\vec{w} \wedge \vec{K})$ où $\vec{w} \cdot \vec{K}$ désigne le produit scalaire de $\vec{w}$ et de $\vec{K}$, et $\vec{w} \wedge \vec{K}$ leur produit vectoriel.

b) Trouver une écriture analogue dans le cas $\theta = -\pi/2$.

IV.C - *Matrices magiques de rotation*

On suppose que u est une rotation mais n'est pas un retournement.

IV.C.1) Montrer que l'axe de cette rotation u est nécessairement la droite dirigée par $\vec{v}$. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle θ de u ?

IV.C.2) En utilisant IV.B.2, chercher, suivant la valeur de θ, l'image par u du vecteur dont les composantes sur $\mathscr{E}$ sont (x_1, x_2, x_3). En déduire toutes les matrices magiques pour lesquelles u est une rotation.

IV.D - *Matrices magiques orthogonales*

IV.D.1) Trouver toutes les matrices magiques M telles que u est un retournement. On cherchera M sous la forme vue en III.A en déterminant les nombres x, y et z.

IV.D.2) Préciser l'ensemble des matrices magiques orthogonales de déterminant égal à 1.

IV.D.3) Préciser l'ensemble des matrices magiques orthogonales de déterminant égal à -1 (on remarquera que si M est magique, $-M$ l'est aussi).

...

Partie V - Matrices magiques symétriques d'ordre n

On suppose maintenant que M est une matrice magique symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

V.A - Montrer que le vecteur colonne dont les n coefficients sont égaux à 1 est vecteur propre de M. Quelle est la valeur propre associée ?

V.B - Déterminer un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ stable par l'endomorphisme u associé à M.

V.C - Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D ayant les propriétés suivantes :

- les termes de la première colonne de P sont tous égaux entre eux ;
- le premier terme diagonal de D est $s(M)$ et la trace de D est aussi $s(M)$;
- $M = PD^tP$.

••• FIN •••

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail